МИНОБРНАУКИ РОССИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ВОРОНЕЖСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ФГБОУ ВО «ВГУ»)

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
математического анализа
Шабров С.А.

25.05.2023

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ

Б1.О.06 Математический анализ

1. Шифр и наименование направления подготовки:
01.05.01 Фундаментальные математика и механика

2. Профиль подготовки: Современные методы теории функций в математике и механике;
Теория функций и приложения

3. Квалификация (степень) выпускника: Математик. Механик. Преподаватель

4. Форма обучения: Очная

5. Кафедра, отвечающая за реализацию дисциплины: Кафедра математического анализа

6. Составители программы:
Плетнева Ольга Константиновна, к.п.н., доцент

7. **Рекомендована:** Научно-методическим Советом математического факультета, протокол от 25.05.2023, №0500-06

8. Учебный год: 2023/2024
2024/2025 **Семестр(-ы):** 1, 2, 3, 4

9. Цели и задачи учебной дисциплины:

Цели изучения дисциплины:

- обучение основам математического анализа для формирования у студентов представления о математике как особом методе познания природы, осознания общности математических понятий и моделей, приобретения навыков логического мышления и оперирования абстрактными математическими объектами;
- воспитание высокой математической культуры;
- закладка фундамента математического образования.

Задачи дисциплины:

- развить умение самостоятельной работы с учебными пособиями и другой научной и математической литературой;
- ознакомить студентов с основными математическими понятиями и методами дифференциального и интегрального исчисления функции одной и многих переменных, формулировками и доказательствами наиболее важных как с теоретической, так и с практической точки зрения теорем данного курса;
- привить навыки решения основных типов задач по разделам дисциплины; выработать у студентов навыки применения полученных теоретических знаний для решения прикладных задач;
- привить точность и обстоятельность аргументации в математических и других научных рассуждениях;
- сформировать высокий уровень математической культуры, достаточный для понимания и усвоения последующих курсов;
- способствовать: подготовке к ведению исследовательской деятельности в областях, использующих математические методы; созданию и использованию математических моделей процессов и объектов; разработке эффективных математических методов решения задач естествознания, техники, экономики и управления.

10. Место учебной дисциплины в структуре ОПОП:

Дисциплина «Математический анализ» относится к обязательной части Блока 1 основной профессиональной образовательной программы направления подготовки 01.05.01 – Современные методы теории функций в математике и механике – Специалист.

Дисциплина «Математический анализ» базируется на знаниях, полученных в рамках школьного курса «Математика» или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования, использующих соответствующие количественные методы. Приобретенные в результате обучения знания, умения и навыки используются во всех без исключения математических и естественнонаучных дисциплинах, модулях и практиках.

11. Планируемые результаты обучения по дисциплине/модулю (знания, умения, навыки), соотнесенные с планируемыми результатами освоения образовательной программы (компетенциями выпускников):

Код	Название компетенции	Код(ы)	Индикатор(ы)	Планируемые результаты обучения
ОПК-1	Способен находить, формулировать и решать актуальные и значимые	ОПК-1.1	Обладает базовыми знаниями, полученными в области математических и (или) естествен-	Знать: - актуальные и значимые проблемы фундаментальной математики и механики. Уметь:

	проблемы фундаментальной математики и механики		ных наук.	- использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности. Владеть: - навыками выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний
		ОПК-1.2	Умеет использовать базовые знания, полученные в области математических и (или) естественных наук, в профессиональной деятельности.	
		ОПК-1.3	Имеет навыки выбора методов решения задач профессиональной деятельности на основе теоретических знаний	

12. Объем дисциплины в зачетных единицах/часах в соответствии с учебным планом — 24/864.
Форма промежуточной аттестации зачеты, экзамены.

13. Трудоемкость по видам учебной работы:

Вид учебной работы	Трудоемкость (часы)				
	Всего	По семестрам			
		1 сем.	2 сем.	3 сем.	4 сем.
Контактная работа	436	100	100	100	136
в том числе: лекции	218	50	50	50	68
практические	218	50	50	50	68
лабораторные					
курсовая работа					
Самостоятельная работа	284	62	62	80	80
Промежуточная аттестация	144	36	36	36	36
Итого:	864	198	198	216	252

13.1. Содержание дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Содержание раздела дисциплины	Реализация раздела дисциплины с помощью онлайн-курса, ЭУМК
		1. Лекции	
1.1	Введение. Элементы логики и теории множеств	Высказывания, логические операции, таблицы истинности. Понятие множества, операции над множествами, равенство множеств.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.2	Вещественные числа	Множество R^1. Аксиомы поля. Свойство непрерывности вещественной прямой. Аксиомы Архимеда, Кантора. Теорема о вложенных отрезках. Окрестность точки. Предельная точка множества, её свойство. Теорема Больцано. Мощность множества. Счётные множества, континуальные множества, их свойства. Счётность множества рациональных чисел. Континуальность множества [0,1]. Ограниченность множества. Верхние и нижние границы множества. Точные верхние и нижние границы, их свойства. Теорема о существовании и единственности точных границ множества.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.3	Отображения, функции	Отображения, функции. Классификация функций. Последовательности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.4	Предел последовательности	Предел последовательности. Теоремы о пределах: о единственности предела; о пределе постоянной; о переходе к пределу в равенствах, об ограниченности сходящейся последовательности. Подпоследовательность. Принцип Больцано-Вейерштрасса. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности, их свойства. Условие Коши. Критерий Коши существования предела последовательности. Предел монотонной последовательности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.5	Теория пределов функции	Предел функции. Предел функции по множеству. Односторонние пределы. Предел по Гейне. Связь между существованием предела функции и существованием предела по множествам; по Гейне, односторонних пределов. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Теорема о представлении функции, имеющей конечный предел. Теоремы о пределах: о единственности предела; о локальной огра-	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853

		ниченности функции, имеющей конечный предел и. О свойствах пределов, связанных с неравенствами; об арифметических свойствах пределов; о пределе промежуточной функции. Условие Коши. Критерий Коши существования предела функции. О пределах монотонной функции Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов с использованием компьютерных технологий.	
1.6	Непрерывность функции	Непрерывность функции в точке, на множестве, односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация. Равномерная непрерывность. Арифметические свойства непрерывных функций. Непрерывность сложной функции. Свойства функций, непрерывных на отрезке: теорема Вейерштрасса. Теорема Кантора. Теорема Коши о промежуточных значениях функций. Следствия. Обратные функции, их существование и непрерывность. Непрерывность основных элементарных функций и элементарных функций. Замечательные пределы. Сравнение функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.7	Производная и дифференциал	Производная. Непрерывность функции, имеющей производную. Геометрический и физический смысл производной. Арифметические свойства производной. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производные гиперболических функций. Таблица производных. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Дифференциал. Связь между существованием дифференциала и производной. Арифметические свойства дифференциала. Таблица дифференциалов. Геометрический смысл дифференциала. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы 1-го дифференциала. Производные высших порядков. Производные высшего порядка от суммы и произведения двух функций. Дифференциалы высшего порядка сложной функции. Инвариантность формы дифференциалов высшего порядка. Теоремы о дифференцируемых функциях (тт. Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши). Правило Лопиталя раскрытия неопределённостей. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью производных: на монотонность, на экстремум. Исследование функций на выпуклость. Нахождение точек перегиба графика функции. Нахождение асимптот функции. Общая схема исследования функций и построение эскиза графика функции.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853

1.8	Неопределенный интеграл	Первообразная и неопределённый интеграл. Свойства неопределённого интеграла. Таблица интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простых дробей. Метод неопределённых коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Неберущиеся интегралы. Вычисление интегралов с помощью компьютерных технологий.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.9	Определенный интеграл Римана	Определение определённого интеграла. Примеры вычисления. Ограниченность интегрируемой функции. Верхние и нижние суммы Дарбу, их свойства. Условия существования определённого интеграла. Класс интегрируемых функций. Свойства определённого интеграла. Определённый интеграл с переменным верхним пределом. Его свойства. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Приложения определённого интеграла. Мера плоских множеств. Свойства меры. Вычисление площадей плоских фигур. Длина дуги. Нахождение длины дуги кривой. Вычисление объёма тела вращения, площади поверхности вращения. Работа силы. Нахождение работы силы. Вычисление массы дуги кривой. Статические моменты. Нахождение координат центра тяжести дуги кривой. Приближенное вычисление определённого интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.10	Несобственные интегралы	Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.11	Функция многих переменных	Пространство R^n. Метрика. Норма элемента. Окрестность точки. Последовательность. Предел последовательности. Эквивалентность сходимости последовательности покоординатной сходимости. Свойства сходящихся последовательностей. Подпоследовательность. Принцип Больцано-Вейерштрасса. $f{:}R^n \to R^1$. Предел. Предел по множеству. Свойства пределов. Повторные пределы, условия их равенства. Предел по Гейне. Непрерывность $f{:}R^n \to R^1$. Свойства непрерывных функций. Непрерывность суперпозиции непрерывных функций. Непрерыв-	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798

		ность элементарных функций нескольких переменных. Равномерная непрерывность. Теоремы Вейерштрасса, Коши, Кантора. Дифференцируемость $f:R^n \to R^1$ (по Фреше). Производная (Фреше). Свойства дифференциалов и производных. Частные производные $f:R^n \to R^1$. Связь между дифференцируемостью функции и существованием частных производных. Вид производной и дифференциала (Фреше). Производная по направлению. Градиент. Дифференциал Гато, производная Гато. Связь между дифференцируемостью по Фреше и по Гато. Дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Дифференциалы высшего порядка. Частные производные высшего порядка. Условия равенства смешанных производных. Формулы для вычисления дифференциалов и производных высшего порядка от сложной функции. Неинвариантность формы 2-го дифференциала. Формула Тейлора для $f:R^n \to R^1$. Экстремум функции нескольких переменных. Отображение f: $\mathrm{R}^n \to \mathrm{R}^m$. Предел. Непрерывность. Дифференциал и производная (Фреше). Их свойства. Дифференциал и производная (Гато). Их свойства. Неявные функции. Существование неявных отображений $f:R^1 \to R^1$. Существование неявных отображений $f:R^n \to R^1$, $f:R^n \to R^m$. Свойства непрерывных отображений $f:R^n \to R^m$. Свойства матриц Якоби и якобианов отображений. Отображение с не равным нулю якобианом. Существование обратного отображения. Условный экстремум.	
1.12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	Числовые ряды. Свойства сходящихся рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Критерий Коши. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Свойства абсолютно сходящихся рядов. Неабсолютно сходящиеся ряды. Теорема Римана. Признаки Дирихле, Абеля. Умножение рядов. Функциональные последовательности. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость предельной функции. Функциональные ряды. Сходимость поточечная, равномерная. Признаки равномерной сходимости. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость суммы функционального ряда. Степенные ряды. Теорема Абеля. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798

		Дифференцируемость и интегрируемость суммы ряда. Аналитические функции. Ряд Тейлора. Разложение функций в ряд Тейлора. Формулы Эйлера. Бесконечные произведения. Необходимый признак сходимости. Связь с рядами. Абсолютная сходимость. Использование компьютера для разложения функции в ряд.	
1.13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	Ряды Фурье. Ортонормированные системы в гильбертовом пространстве. Ряд Фурье по элементам ортонормированной системы. Неравенство Бесселя. Замкнутые и полные ортонормированные системы. Равенство Парсеваля. Тригонометрический ряд Фурье. Стремление коэффициентов Фурье к нулю. Интеграл Дирихле. Принцип локализации. Поточечная сходимость ряда Фурье. Теорема Вейерштрасса. Теорема Дирихле. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье. Частные виды рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Преобразование Фурье. Обратное преобразование Фурье.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798
1.14	Интегралы, зависящие от параметра	Собственные интегралы, зависящие от параметра. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, её признаки. Непрерывность, интегрируемость, дифференцируемость несобственного интеграла, зависящего от параметра. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798
1.15	Интегрирование функции нескольких переменных	Двойной интеграл. Условия существования. Свойства двойного интеграла. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и механические приложения двойных интегралов. Тройной интеграл. Условия существования. Свойства. Сведение к повторному интегралу. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрические и механические приложения тройного интеграла. n-кратный интеграл. Свойства. Сведение его к повторному. Замена переменных. Несобственные кратные интегралы. Способы задания кривых на плоскости и в пространстве. Касательная и нормаль. Криволинейный интеграл 1-го рода. Связь с римановским интегралом. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода, с римановским интегра-	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798

		лом. Формула Грина. Условия независимости криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования. Случаи наличия особых точек. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода. Поверхность в трёхмерном пространстве. Касательная плоскость, нормаль к поверхности. Поверхностный интеграл 1-го рода. Сведение его к римановскому интегралу. Свойства и приложения поверхностного интеграла 1-го рода. Ориентация поверхности. Односторонние и двухсторонние поверхности. Поверхностные интегралы 2-го рода. Связь их с римановскими интегралами. Свойства. Формула Остроградского-Гаусса. Формулы Стокса и Остроградского-Гаусса в векторной форме. Формула Стокса. Основные операции теории поля. Соленоидное поле. Потенциальное поле.	
2. Практические занятия			
1.1	Введение.	Метод математической индукции. Свойства модуля	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.2	Вещественные числа	Множество R^1. Мощность множества. Счётные множества, континуальные множества. Верхние и нижние границы множества. Точные верхние и нижние границы, их свойства.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.3	Отображения, функции	Построение эскизов графиков функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.4	Предел последовательности	Предел последовательности. Различные приемы вычисления пределов. Подпоследовательность. Частичный предел. Верхний и нижний пределы последовательности. Критерий Коши существования предела последовательности.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.5	Теория пределов функции	Предел функции. Вычисление пределов. Односторонние пределы. Бесконечно малые и бесконечно большие функции, их свойства. Представление функции, имеющей конечный предел. Свойства пределов, связанные с неравенствами; арифметические свойства пределов. Первый и второй замечательные пределы. Вычисление пределов с использованием компьютерных технологий.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.6	Непрерывность функции	Непрерывность функции в точке, на множестве, односторонняя непрерывность. Точки разрыва, их классификация. Равномерная непрерывность. Замечательные пределы. Сравнение функций.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.7	Производная и дифференциал	Производная. Геометрический и физический смысл производной. Арифметиче-	https://edu.vsu.ru/cour

		ские свойства производной. Производная обратной функции. Производная сложной функции. Производные гиперболических функций. Логарифмическая производная. Производная функции, заданной параметрически. Дифференциал. Дифференциал сложной функции. Производные высших порядков. Дифференциалы высшего порядка сложной функции. Формула Тейлора. Исследование функций с помощью производных: на монотонность, на экстремум. Исследование функций на выпуклость. Нахождение точек перегиба графика функции. Нахождение асимптот функции. Общая схема исследования функций и построение эскиза графика функции.	se/view.php ?id=4853
1.8	Неопределенный интеграл	Первообразная и неопределённый интеграл. Таблица интегралов. Замена переменной. Интегрирование по частям. Интегрирование рациональных функций. Интегрирование простых дробей. Метод неопределённых коэффициентов. Метод Остроградского. Интегрирование иррациональных функций. Подстановки Эйлера. Интегрирование дифференциального бинома. Интегрирование тригонометрических функций. Вычисление интегралов с помощью компьютерных технологий.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.9	Определенный интеграл Римана	Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Замена переменной и интегрирование по частям в определённом интеграле. Вычисление площадей плоских фигур. Нахождение длины дуги кривой. Вычисление объёма тела вращения, площади поверхности вращения. Нахождение работы силы. Вычисление массы дуги кривой. Статические моменты. Нахождение координат центра тяжести дуги кривой. Приближенное вычисление определённого интеграла. Формулы прямоугольников, трапеций, Симпсона.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.10	Несобственные интегралы	Несобственный интеграл от неограниченной функции. Несобственный интеграл по бесконечному промежутку. Использование компьютера для вычисления несобственных интегралов.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4853
1.11	Функция многих переменных	Пространство R^n. Предел последовательности. $f:R^n \to R^1$. Предел. Предел по множеству. Свойства пределов. Повторные пределы. Непрерывность $f:R^n \to R^1$. Свойства непрерывных функций. Равномерная непрерывность. Частные производные $f:R^n \to R^1$. Производная по направлению. Градиент. Дифференциал сложной функции. Дифференциалы	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798

		высшего порядка. Частные производные высшего порядка. Формулы для вычисления дифференциалов и производных высшего порядка от сложной функции. Формула Тейлора для $f:R^n \to R^1$. Экстремум функции нескольких переменных. Условный экстремум.	
1.12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	Числовые ряды. Необходимый признак сходимости ряда. Признаки сходимости знакоположительных рядов. Абсолютно сходящиеся ряды. Признаки Дирихле, Абеля. Функциональные последовательности. Признаки равномерной сходимости. Функциональные ряды. Степенные ряды. Нахождение радиуса сходимости степенного ряда. Разложение функций в ряд Тейлора. Формулы Эйлера. Использование компьютера для разложения функции в ряд.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798
1.13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	Ряды Фурье. Частные виды рядов Фурье. Комплексная запись ряда Фурье. Преобразование Фурье.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798
1.14	Интегралы, зависящие от параметра	Собственные интегралы, зависящие от параметра. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость, её признаки. Интегралы Эйлера, их свойства. Вычисление интегралов с помощью интегралов, зависящих от параметра.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798
1.15	Интегрирование функции нескольких переменных	Двойной интеграл. Сведение двойного интеграла к повторному. Замена переменных в двойном интеграле. Геометрические и механические приложения двойных интегралов. Сведение к повторному интегралу. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрические и механические приложения тройного интеграла. Несобственные кратные интегралы. Криволинейный интеграл 1-го рода. Связь с римановским интегралом. Свойства криволинейного интеграла 1-го рода. Приложения. Криволинейные интегралы 2-го рода. Связь с криволинейным интегралом 1-го рода, с римановским интегралом. Формула Грина. Приложения криволинейного интеграла 2-го рода. Поверхностный интеграл 1-го рода. Сведение его к римановскому интегралу. Свойства и приложения поверхностного интеграла 1-го рода. Поверхностные интегралы 2-го рода. Связь их с римановскими интегралами. Формула Остроградского-Гаусса. Формула Стокса. Основные операции теории поля.	https://edu.vsu.ru/course/view.php?id=4798

13.2. Темы (разделы) дисциплины и виды занятий:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины	Виды занятий (часов)				
		Лекции	Практические	Лабораторные	Самостоятельная работа	Всего
01	Введение. Элементы логики и теории множеств	4	4		10	18
02	Вещественные числа	8	6		10	24
03	Отображения, функции	4	8		10	22
04	Предел последовательности	14	14		16	44
05	Теория пределов функции	12	12		10	34
06	Непрерывность функции	12	10		10	32
07	Производная и дифференциал	20	20		20	60
08	Неопределенный интеграл	12	20		20	52
09	Определенный интеграл Римана	20	20		30	70
10	Несобственные интегралы	6	10		18	34
11	Функция многих переменных	24	20		26	70
12	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	20	20		20	60
13	Ряды Фурье и преобразование Фурье	18	12		20	50
14	Интегралы, зависящие от параметра	14	16		20	50
15	Интегрирование функции нескольких переменных	30	26		44	100
Итого		218	218		284	720

14. Методические указания для обучающихся по освоению дисциплины:

Методические указания к лекционным занятиям

В ходе лекционных занятий необходимо вести конспектирование учебного материала. Обращать внимание на категории, формулировки, раскрывающие содержание тех или иных явлений и процессов, научные выводы и практические рекомендации. Желательно оставить в рабочих конспектах поля, на которых делать пометки из рекомендованной литературы, дополняющие материал прослушанной лекции, а также подчеркивающие особую важность тех или иных теоретических положений. Задавать преподавателю уточняющие вопросы с целью уяснения теоретических положений, разрешения спорных ситуаций.

Методические рекомендации студентам к практическим занятиям

Важной составной частью учебного процесса в вузе являются практические занятия. Практические занятия требуют помимо знаний теоретического материала еще и навыков решения практических задач, и помогают студентам глубже усвоить учебный материал, приобрести практические навыки и навыки творческой работы над учебной и научной литературой.

В начале практического занятия происходит обсуждение задач, решенных студентами самостоятельно дома. Это возможность для студентов еще раз обратить внимание на не непонятные до сих пор моменты и окончательно разобрать их.

Преподаватель может (выборочно) проверить записи с самостоятельно решенными задачами.
Затем начинается опрос по теме, обозначенной для данного практического занятия. В процессе этого опроса студенты под руководством преподавателя более глубоко осмысливают теоретические положения по теме занятия.
На практическом занятии каждый его участник должен быть готовым к ответам на все теоретические вопросы, поставленные в плане, проявлять максимальную активность при их рассмотрении. Ответы должны строиться свободно, убедительно и аргументировано. Преподаватель следит, чтобы ответы были точными, логично построенным и не сводилось к чтению конспекта. Необходимо, чтобы выступающий проявлял глубокое понимание того, о чем он говорит, сопоставлял теоретические знания (определений, теорем, утверждений и т.д.) с их практическим применением для решения задач, был способен привести конкретные примеры тех математических объектов и положений, о которых рассуждает теоретически.
В ходе обсуждения теоретического материла могут разгореться споры, дискуссии, к участию в которых должен стремиться каждый. Преподавателю необходимо внимательно и критически слушать, подмечать особенное в суждениях студентов, улавливать недостатки и ошибки, корректировать их знания, и, если нужно, выступить в роли рефери. При этом обратить внимание на то, что еще не было сказано, или поддержать и развить интересную мысль, высказанную выступающим студентом.
В заключение опроса преподаватель, еще раз кратко резюмирует теоретический материла, необходимый для решения задач. Также преподаватель может (выборочно) проверить конспекты студентов и, если потребуется, внести в них исправления и дополнения,
Затем приступают к решению практических задач, используя изученные теоретические положения.
Планы практических занятий, их тематика, рекомендуемая литература, цель и задачи ее изучения сообщаются преподавателем на вводных занятиях или в методических указаниях по данной дисциплине.
Методические рекомендации студентам к самостоятельным занятиям
Самостоятельная учебная деятельность студентов по дисциплине предполагает следующее:
- самостоятельное изучение учебных материалов с использованием основной и дополнительной литературы, информационно-справочных и поисковых систем;
- подготовку к текущим аттестациям: выполнение лабораторных заданий, самостоятельное освоение понятийного аппарата по каждой теме.

Качественное выполнение контрольных работ и домашних заданий, полноценное изучение и максимальное задействование всех предоставленных обучающимся информационно-коммуникационных ресурсов. Приоритетной является работа с общедоступными современными пакетами программ.
Все выполняемые студентами самостоятельно задания (выполнение контрольных и лабораторных работ) подлежат последующей проверке преподавателем. Результаты текущих аттестаций учитываются преподавателем при проведении промежуточной аттестации.

15. Перечень основной и дополнительной литературы, ресурсов интернет, необходимых для освоения дисциплины:

(список литературы оформляется в соответствии с требованиями ГОСТ и используется общая сквозная нумерация для всех видов литературы)

а) основная литература:

№ п/п	Источник
1	Кудрявцев, Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т.1. Дифференциальное и интегральное исчисления функций одной переменной. Ряды: Учебник [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Москва : Физматлит, 2015. — 444 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/71994.
2	Фихтенгольц, Г.М. Основы математического анализа. В 2-х тт. Том 1 [Электронный ресурс] : учеб. — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2015. — 448 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/65055.
3	Демидович, Б.П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу [Электронный ресурс] : учеб. пособие — Электрон. дан. — Санкт-Петербург : Лань, 2017. — 624 с. — Режим доступа: https://e.lanbook.com/book/92629.

б) дополнительная литература:

№ п/п	Источник
1.	*Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 1. – 616 с.*
2.	*Ильин В.А. Математический анализ / В.А.Ильин, В.А.Садовничий, Б.И.Сендов. – М.: Изд-во МГУ, 2004. – Часть 2. – 357 с.*
3.	***Будаев, Виктор Дмитриевич****. Математический анализ : : учебник / В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон ; В. Д. Будаев, М. Я. Якубсон .— Москва : Лань, 2012 .— 544 с. : ил. ; 22 см. — Допущено Учебно-методическим объединением по направлениям педагогического образованию Министерства образования и науки РФ в качестве учебника для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению 050200 — «Физико-математическое образование». — Предм. указ.: с. 532-536 .— Имен. указ.: с. 537 .— Библиогр.: с. 531 .— ISBN 978-5-8114-1186-3 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=3173>.*
4.	***Карташев, Алексей Павлович****. Математический анализ : / А. П. Карташев, Б. Л. Рождественский .— Москва : Лань, 2007 .— 447 с. : ил. ; 21 см .— (Лучшие классические учебники. Математика) (Классическая учебная литература по математике) (Учебники для вузов. Специальная литература) .— .— ISBN 978-5-8114-0700-2 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=178>.*
5.	*Практическое руководство к решению задач по высшей математике. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия, введение в математический анализ, производная и ее приложения : / И. А. Соловьев, В. В. Шевелев, А. В. Червяков, А. Ю. Репин .— Москва : Лань, 2009 .— 319 с. : ил. ; 21 см .— (Учебники для вузов. Специальная литература) .— .— Библиогр.: с. 316. — ISBN 978-5-8114-0751-4 .— <URL:http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_cid=25&pl1_id=374>.*
6.	*Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука,1990. – Т.1. – 528 с.*
7.	*Никольский С.М. Курс математического анализа /С.М.Никольский. – М.: Наука,1990. – Т.2. – 543 с.*

8.	*Математический анализ-1. Метод математической индукции. Точные границы числовых множеств: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова, О.К. Плетнева, Е.В. Раецкая – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2007. – 18 с.*
9.	*Математический анализ-2. Построение графиков функций: учебно-методическое пособие для вузов / Воронеж. гос. ун-т; сот. С.П.Зубова, О.К. Плетнева, Е.В. Раецкая – Воронеж: ИПЦ ВГУ, 2009. – 26 с.*

в) информационные электронно-образовательные ресурсы**:**

№ п/п	Источник
1.	*Электронный каталог Научной библиотеки Воронежского государственного университета. – (http // www.lib.vsu.ru/)*
2.	*http://www.math.vsu.ru – официальный сайт математического факультета ВГУ*
3.	*Google, Yandex, Rambler*
4.	*ЭБС «Университетская библиотека онлайн»: образовательный ресурс: <URL:http://www.biblioclub.ru> .*

16. Перечень учебно-методического обеспечения для самостоятельной работы:

№ п/п	Источник
1.	*Шилов Г.К. Математический анализ (функции одного переменного) /Г.К.Шилов. – М.:Наука,1969. - 528 с.*
2.	*Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ,1984. – Часть 1. – 392 с.*
3.	*Соболев В.И. Краткий курс математического анализа / В.И. Соболев, В.В.Покорный, В.И.Аносов. – Воронеж: Изд-во ВГУ,1984. – Часть 2. – 346 с.*
4.	*Кудрявцев Л.Д. Сборник задач по математическому анализу / Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. – М.: Физматлит, 2003. – Т.2. – 504с.*

Курс дисциплины построен таким образом, чтобы позволить студентам максимально проявить способность к самостоятельной работе. Для успешной самостоятельной работы предполагается тесный контакт с преподавателем.

Изучение дисциплины следует начинать с проработки настоящей рабочей программы, особое внимание, уделяя целям и задачам, структуре и содержанию курса.

Студентам рекомендуется получить в библиотеке учебную литературу по дисциплине, необходимую для эффективной работы на всех видах аудиторных занятий, а также для самостоятельной работы по изучению дисциплины.

Своевременное и качественное выполнение самостоятельной работы базируется на соблюдении настоящих рекомендаций и изучении рекомендованной литературы. Студент может дополнить список использованной литературы современными источниками, не представленными в списке рекомендованной литературы, и в дальнейшем использовать собственные подготовленные учебные материалы при написании курсовых и дипломных работ.

Успешное освоение курса предполагает активное, творческое участие студента путем планомерной, повседневной работы.

17. Информационные технологии, используемые для реализации учебной дисциплины, включая программное обеспечение и информационно-справочные системы (при необходимости)

При реализации дисциплины используются следующие образовательные технологии: логическое построение дисциплины, установление межпредметных связей, обозначение теоретического и практического компонентов в учебном материале, актуализация личного и учебно-профессионального опыта обучающихся, включение элементов дистанционных образовательных технологий.

В практической части курса используется стандартное современное программное обеспечение персонального компьютера.

В части освоения материала лекционных и лабораторных занятий, самостоятельной работы по отдельным разделам дисциплины, прохождения текущей и промежуточной аттестации может применяться электронное обучение и дистанционные образовательные технологии.

Осуществляется интерактивная связь с преподавателем через сеть интернет, проводятся индивидуальные онлайн консультации.

Доклады осуществляются с использованием презентационного оборудования.

18. Материально-техническое обеспечение дисциплины:

Для проведения лекционных и практических занятий используются аудитории, соответствующие действующим санитарно-техническим нормам и противопожарным правилам.

Для самостоятельной работы используются классы с компьютерной техникой, оснащенные необходимым программным обеспечением, электронными учебными пособиями и законодательно - правовой и нормативной поисковой системой, имеющий выход в глобальную сеть.

Ubuntu (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ubuntu.com/download/desktop)

VisualStudioCommunity (бесплатное и/или свободное ПО, лицензия https://visualstudio.microsoft.com/ru/vs/community/); MATLABClassroom (сублицензионный контракт 3010-07/01-19 от 09.01.19);

LibreOffice (GNU Lesser General Public License (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://ru.libreoffice.org/about- us/license/)

Lazarus (GNULesserGeneralPublicLicense (LGPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.lazarus-ide.org/index.php)

FreePascal (GNUGeneralPublicLicense (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия: https://www.freepascal.org/faq.html);

Maxima (GNUGeneralPublicLicense (GPL), бесплатное и/или свободное ПО, лицензия http://maxima.sourceforge.net/faq.html)

В самостоятельной работе обучающиеся используют ресурсы Зональной научной библиотеки ВГУ (электронный каталог: http://www.lib.vsu.ru)

19. Оценочные средства для проведения текущей и промежуточной аттестаций:

Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Введение. Элементы логики и теории множеств	ОПК-1	ОПК-1.1	Устный опрос
2.	Вещественные числа	ОПК-1	ОПК-1.1	Устный опрос
3.	Отображения, функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Устный опрос
4.	Предел последовательности	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №1.1
5.	Теория пределов функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №1.1
6.	Непрерывность функции	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №1.1
7.	Производная и дифференциал	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №1.2
Промежуточная аттестация форма контроля – зачет, экзамен				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Неопределенный интеграл	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №2.1
2.	Определенный интеграл Римана	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №2.2
3.	Несобственные интегралы	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №2.2
4.	Функция многих переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Индивидуальные задания

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Функция многих переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №3.1
2.	Ряды, функциональные последовательности. Бесконечные произведения	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №3.2
3.	Ряды Фурье и преобразование Фурье	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №3.2
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

№ п/п	Наименование раздела дисциплины (модуля)	Компетенция(и)	Индикатор(ы) достижения компетенции	Оценочные средства
1.	Интегралы, зависящие от параметра	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №4.1
2.	Интегрирование функции нескольких переменных	ОПК-1	ОПК-1.1 ОПК-1.2 ОПК-1.3	Контрольная работа №4.2
Промежуточная аттестация форма контроля - зачет				Контрольные работы КИМы к экзамену

20 Типовые оценочные средства и методические материалы, определяющие процедуры оценивания

20.1 Текущий контроль успеваемости

Примерные темы курсовых работ

1. Гиперболические и обратные гиперболические функции
2. Векторные функции действительного переменного
3. Основные теоремы о непрерывных функциях
4. Основные теоремы о дифференцируемых функциях
5. Теория экстремума функций двух переменных
6. Производные и дифференциалы высших порядков функции двух переменных
7. Верхние и нижние пределы последовательности
8. Верхние и нижние пределы функции в точке
9. Формула Кардано
10. Признаки сходимости числовых рядов
11. Сравнение бесконечно малых
12. Формула Тейлора в разных формах
13. Математическая модель транспортной задачи
14. Сетевые методы в планировании
15. Решение оптимизационной задачи линейного программирования
16. Математические методы в организации транспортного процесса
17. Вычисление интеграла функции f(x) методом Симпсона
18. Корреляционно-регрессивный анализ
19. Аппроксимация функций
20. Приближенное вычисление определенного интеграла при помощи квадратурной формулы Чебышева
21. Центральная предельная теорема и её приложения. Решение определенного интеграла методом Монте-Карло
22. Решение транспортной задачи методом потенциалов
23. Математическое моделирование
24. Приближенные методы вычисления определенного интеграла
25. Несобственные интегралы
26. Приложения определенного интеграла
27. Задача потребительского выбора
28. Производственные функции
29. Эластичность функций одной и нескольких переменных

Текущая аттестация проводится в форме контрольных работ:

Образцы контрольных работ
Семестр №1

Контрольная работа №1.1

Вариант 1

Задание 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$), если $a_n = \dfrac{2n^3}{n^3-2}$, $a = 2$.

Задание 2. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = \dfrac{2+n}{n}$.

Задание 3. Вычислить предел последовательности:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^3}{(n+1)^2-(n+1)^3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[3]{5n^2}+\sqrt[4]{9n^8+1}}{\left(n+\sqrt{n}\right)\sqrt{7-n+n^2}}$
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3}(n-1)(n+2)n}{(n-3)^3}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{8^n+(n-1)!}{n^3+n!}$

Вариант 2

Задание 1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ (указать $N(\varepsilon)$), если $a_n = \dfrac{2-3n^2}{4+5n^2}$, $a = -\dfrac{3}{5}$.

Задание 2. Пользуясь критерием Коши, доказать сходимость последовательности $x_n = \dfrac{3n}{1-n}$.

Задание 3. Вычислить предел последовательности:

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(3-n)^4-(2-n)^4}{(1-n)^3-(1+n)^3}$.	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n\sqrt[4]{3n+1}+\sqrt{81n^4-n^2+1}}{\left(n+\sqrt[3]{n}\right)\sqrt{5-n+n^2}}$.
$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{3n^2-1}-\sqrt{2n^2+1}}{n+1}$	$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n 6^n+5^{n+1}}{5^n-6^{n+1}}$

Контрольная работа №1.2

Вариант 1

Задание 1. Сформулировать с помощью неравенств утверждение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=+\infty$.

Задание 2. Вычислить пределы:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x+x^2}-1}{x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x\sqrt{x+1}}{\sqrt{x(3x^2+1)}}$
$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin 3x}{1-2\cos x}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+5}{x-1}\right)^{x+7}$

Задание 3. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{x^4-1}{1-\sqrt{x}}$ и определить их род.

Задание 4. Используя определение, доказать, что функция $y=x^2$ является равномерно непрерывной на промежутке $(0;\ 2)$.

Вариант 2

Задание 1. Сформулировать с помощью неравенств утверждение: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=+a$.

Задание 2. Вычислить предел последовательности:

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x^2-3}{x\sqrt{x^4+1}}$
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin 3\pi x}{\cos\dfrac{\pi}{2x}}$	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-5}{2x+1}\right)^{x-1}$

Задание 3. Найти точки разрыва функции $y=\dfrac{2x^2+x-1}{|x+1|}$ и определить их род.

Задание 4. Используя определение, доказать, что функция $y=\sqrt{x+1}$ является равномерно непрерывной на промежутке $(3;\ 8)$.

Семестр №2

Контрольная работа №2.1

Вариант 1

Задание 1. Вычислить: $\int(4-3x)e^{-3x}dx.$

Задание 2. Вычислить: $\int\dfrac{dx}{x\sqrt{x^2+1}}.$

Задание 3. Вычислить: $\int\dfrac{x^3+1}{x^2-x}dx.$

Задание 4. Вычислить: $\int \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[4]{x^3}}dx.$

Задание 5. Вычислить: $\int \frac{x^3+6x^2+13x+9}{(x+1)(x+2)^3}dx.$

Задание 6. Вычислить: $\int x^3(1-5x^2)^{10}dx$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить: $\int \operatorname{arctg}\sqrt{4x-1}dx.$

Задание 2. Вычислить: $\int \frac{1+\ln x}{x}dx.$

Задание 3. Вычислить: $\int \frac{3x^3+1}{x^2-1}dx.$

Задание 4. Вычислить: $\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{x\sqrt[3]{x^2}}dx.$

Задание 5. Вычислить: $\int \frac{x^3+6x^2+13x+8}{x(x+2)^3}dx.$

Задание 6. Вычислить: $\int \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}dx.$

Контрольная работа №2.2

Вариант 1

Задание 1. Вычислить интегралы: $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$, $\int\limits_{1}^{3} x \ln x \, dx$.

Задание 2. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями: $x\,y=6, \quad y=7-x.$

Задание 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси *Ox* кривой $y=\sqrt{x}e^{-x}$, $x=3$, $y=0$.

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах: $r=\sin 3\varphi.$

Вариант 2

Задание 1. Вычислить интегралы: $\int\limits_{1}^{4} \frac{1+\sqrt{x}}{x^2}dx$, $\int\limits_{\pi}^{0} x\cdot\cos x \, dx$.

Задание 2. Вычислить площади фигуры, ограниченной линиями: $x^2 = 9y, \quad x = 3y - 6.$

Задание 3. Вычислить объем тела, образованного вращением вокруг оси Ox кривой $y = 3x^2$, $y = 3|x|$..

Задание 4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями, заданными в полярных координатах: $r = \cos 2\varphi$.

Семестр №3

Контрольная работа №3.1

Вариант 1

Задание 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ если а) $z = 2^{xy} + \sin(2xy)$.

б) $z = \mathrm{tg}\frac{x}{y} \cdot \sin\frac{y}{x}$.

Задание 2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z = \ln\left(x^2 + y\right)$.

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию $z = x^2 + y^2 - 6x + 8y - 2$.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = x^2 + 2xy - y^2 - 4x$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1,\ y = 0,\ x = 3$.

Вариант 2

Задание 1. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$ если а) $z = \ln\sin\left(x^2 + y\right)$.

б) $z = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

Задание 2. Показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y\,\partial x}$ для функции $z = \sqrt{2xy + y^2}$.

Задание 3. Исследовать на экстремум функцию $z = 2x - 2y - x^2 - y^2 + 6$.

Задание 4. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $z = y^2 - 2xy - x^2 + 4x - 3$ в треугольнике со сторонами $y = x + 1,\ \ x = 0,\ \ y = 2$.

Контрольная работа №3.2

Вариант 1

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{2^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n}{2n+1}\right)^{2n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n\sin\frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^5 + 3n + 6}}.$$

Задание 2. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^{n}$.

Задание 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2-4n+5}{3^n\cdot(n+1)}\cdot(3x-1)^n$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 cos\sqrt[3]{x}dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

Вариант 2

Задание 1. Исследовать данные ряды на сходимость:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n+3}{3^n},\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{3n+1}{n-1}\right)^{n-1},\ \sum_{n=1}^{\infty}arcsin\frac{5}{\sqrt{n^3}},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{\sqrt{n^7+4n^2+5}}.$$

Задание 2. Пользуясь признаком Лейбница, исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt[4]{2n+3}}$.

Задание 3. Найти область сходимости ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{2^n(x-1)^n}$.

Задание 4. Вычислить определенный интеграл $\int_0^1 x^2 sin x^2 dx$ с точностью до 0,001, разложив подынтегральную функцию в ряд.

Семестр №4

Контрольная работа №4.1

Вариант 1

Задание 1. Разложить в ряд Фурье с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$, функцию $f(x)=2x+1$.

Задание 2. Представить периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le 3,\\ 6;\ 3<x\le 6;\end{cases}$ заданную на полупериоде $[0,l]$, рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

Задание 3. Разложить периодическую функцию $y=arcsin(sin(3x))$ в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда.

Вариант 2

Задание 1. Разложить в ряд Фурье с периодом 2π, заданную на отрезке $[-\pi,\pi]$, функцию $f(x)=x\pi-1$.

Задание 2. Представить периодическую функцию $f(x)=\begin{cases} 2x;\ 0\le x\le 3, \\ 6;\ 3<x\le 6; \end{cases}$ заданную на полупериоде $[0,l]$, рядом Фурье по косинусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

Задание 3. Разложить периодическую функцию $y=sign\left(sin\frac{x}{2}\right)$ в ряд Фурье. Изобразить график суммы ряда.

Контрольная работа №4.2

Вариант 1

Задание 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \frac{x^2}{y^2}dxdy$, D — область, ограниченная линиями: $x=2$, $y=x$, $xy=1$.

Задание 2. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D arctg\frac{y}{x}dxdy$, D — область, определяемая неравенствами: $x^2+y^2\ge 1$, $x^2+y^2\le 9$, $y\ge\frac{x}{\sqrt{3}}$, $y\le x\sqrt{3}$.

Задание 3. Найти объем тела, ограниченного поверхностями: $y=0$, $z=0$. $3x+y=6$, $3x+2y=12$ и $x+y+z=6$.

Задание 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D \frac{dxdydz}{(x+y+z+1)^3}$, D — область, ограниченная плоскостями: $x=0$, $y=0$, $z=0$, $x+y+z=1$.

Задание 5. Перейдя в тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим или сферическим координатам, расставить пределы интегрирования, если D — область, ограниченная цилиндром $x^2+y^2=2x$, плоскостью $z=0$ и параболоидом $z=x^2+y^2$.

Вариант 2

Задание 1. Вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D cos(x+y)dxdy$, D — область, ограниченная линиями: $x=0$, $y=x$, $y=\pi$.

Задание 2. Перейдя к полярным координатам, вычислить двойной интеграл $\iint\limits_D \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}\,dxdy$, D — круг $x^2 + y^2 \le Rx$.

Задание 3. Определить площадь части поверхности $z^2 + y^2 = x^2$, вырезанной цилиндром $x^2 - y^2 = a^2$ и плоскостями $y = b$ и $y = -b$.

Задание 4. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D xydxdydz$, D — область, ограниченная гиперболическим параболоидом $z = xy$ и плоскостями $x + y = 1$ и $z = 0$ ($z \ge 0$).

Задание 4. Перейдя в тройном интеграле $\iiint\limits_D f(x,y,z)dxdydz$ к цилиндрическим или сферическим координатам, расставить пределы интегрирования, если D — часть шара $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$, лежащая внутри цилиндра $\left(x^2 + y^2\right)^2 = R^2\left(x^2 - y^2\right)$ ($x \ge 0$).

20.2 Промежуточная аттестация

Промежуточная аттестация осуществляется в форме экзаменов, программы к которым и образцы билетов приводятся ниже.

Семестр №1

Программа по математическому анализу для студентов 1 курса, 1 семестр

1. Элементы логики, таблицы истинности, основные формулы.
2. Основные операции над множествами. Равенство множеств.
3. Метод математической индукции. Формула бинома Ньютона.
4. Ограниченность множества. Грани числовых множеств. Теорема о точных гранях.
5. Принцип Архимеда.
6. Принцип вложенных отрезков. Система вложенных отрезков с длинами стремящимися к нулю.
7. Мощность множества. Две леммы о счетных множествах. Счетность множества рациональных чисел.
8. Мощность множества точек отрезка. Континуальная мощность. Теорема Кантора.
9. Числовые последовательности и их сходимость (определение, примеры). Теорема о единственности предела.
10. Переход к пределам в неравенствах (три теоремы и следствия к ним).
11. Теорема об ограниченности сходящейся последовательности.
12. Бесконечно малые последовательности, их свойства.
13. Пределы арифметических выражений (лемма и 4 свойства).
14. Монотонные последовательности. Теорема Вейерштрасса.
15. Число *е*.

16. Подпоследовательности. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Частичные пределы последовательности.
17. Фундаментальные последовательности. Три леммы о фундаментальных последовательностях. Критерий Коши сходимости последовательности.
18. Теорема о существовании наименьшего и наибольшего частичных пределов. Верхний и нижний пределы. Теорема о необходимом и достаточном условии существования конечного предела.
19. Определение предела функции по Гейне.
20. Определение предела функции по Коши и её геометрический смысл.
21. Равносильность определений пределов по Гейне и по Коши.
22. Условие существования предела.
23. Непрерывные функции. Теорема Вейерштрасса. Теорема Больцано-Коши.
24. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции через односторонние пределы.
25. Свойства пределов функций (6 свойств).
26. Бесконечно малые функции. Лемма о критерии существования предела. Свойства бесконечно малых.
27. Классификация точек разрыва.
28. Монотонные функции. Теорема о пределе монотонной функции.
29. Критерий Коши.
30. Равномерная непрерывность. Теорема Кантора.
31. Колебание функции на отрезке. Теорема о равномерной непрерывности функции с ограниченным колебанием.
32. Первый замечательный предел.
33. Второй замечательный предел, его различные формы.
34. Сравнение функций в окрестности точки.
35. Производная функции в точке, определение, примеры.
36. Дифференциал функции. Теорема о дифференцируемости функции. Теорема о непрерывности дифференцируемой функции.
37. Геометрический смысл производной. Уравнение касательной к графику функции в точке. Физический смысл производной.
38. Теорема о дифференцируемости линейной комбинации, произведения и частного дифференцируемых функций.
39. Производная обратной функции.
40. Производная и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала.
41. Определение производных высших порядков. Производные высших порядков линейной комбинации и произведения функций.
42. Производные высших порядков сложной и обратной функций.
43. Производные первого и высших порядков функции заданной параметрически. Дифференциалы высших порядков.
44. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа, Коши.
45. Раскрытие неопределенностей по правилу Лопиталя (три теоремы, одна без доказательства).
46. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. Теорема о единственности многочлена Тейлора. Разложение по формуле Маклорена основных элементарных функций.
47. Признак монотонности. Теорема.
48. Локальные экстремумы функции. Необходимое условие экстремума.
49. Точки возрастания (убывания). Лемма. Теорема о максимуме (минимуме), возрастании (убывании).

50. Достаточный признак экстремума и монотонности для *n* раз дифференцируемой функции.
51. Выпуклость, вогнутость, точки перегиба. Достаточное условие строгой выпуклости (вогнутости). Касательная и выпуклость, теорема.
52. Точки перегиба. Необходимое и два достаточных условия точек перегиба.
53. Асимптоты. Схема построения графика функции с полным исследованием.

Образцы КИМ

Контрольно-измерительный материал №_1_

Теория:

1. Логические действия. Таблицы истинности. Основные формулы логического исчисления (доказать две из них).
2. Определение предела функции по Коши и его геометрический смысл. Примеры.
3. Производная функции в точке, определение. Производная обратной функции

Практика:

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать равенство: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n n}{n^3+2}=0$.
2. Определить тип точки разрыва $x=0$ для функции $y=2^{\frac{1}{x}}$.
3. Вычислить предел, пользуясь правилом Лопиталя: $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ln(1+sin\,x)}{sin\,4x}$.

Контрольно-измерительный материал №_2_

Теория:

1. Основные операции над множествами. Числовые множества. Примеры.
2. Определение предела функции по Гейне. Примеры. Равносильность определений по Гейне и по Коши.
3. Дифференциал функции, определение. Дифференциал сложной функции.

Практика:

1. Вычислить предел последовательности: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{99(n+2)(1-n)}{(n+3)^3}$.
2. Доказать непрерывность функции $y=sin\,x$.
3. Найти производную y'_x функции $\begin{cases} x=\sqrt{2t-t^2}, \\ y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{(1-t)^2}}. \end{cases}$

Контрольно-измерительный материал №_3_

Теория:

1. Принцип Архимеда с доказательством.
2. Односторонние пределы. Критерий существования предела функции через односторонние пределы.
3. Производная функции, определение. Производная сложной функции.

Практика:

1. Пользуясь определением предела последовательности, доказать равенство: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n+1}=\frac{1}{3}$.
2. Показать, что функция $f(x)=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0, \\ 0, & x=0; \end{cases}$ непрерывна при $x=0$.
3. Найти дифференциал функции $y=ln\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{2x}$.

Семестр №2

Программа по математическому анализу для студентов 1 курса, 2 семестр

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Примеры.
2. Лемма об отличии двух первообразных на константу.
3. Таблица интегралов. Примеры.
4. Свойства неопределенного интеграла (4 свойства и следствие).
5. Формула замены переменной. Примеры.
6. Формула интегрирования по частям. Примеры.
7. Интегрирование элементарных рациональных дробей четырех видов. Примеры.
8. Разложение рациональной дроби на элементарные дроби методом неопределенных коэффициентов. Примеры.
9. Метод Остроградского. Примеры.
10. Интегрирование иррациональных функций вида: $\int R\left[x,\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_1}{n_1}},\dots\left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\frac{m_k}{n_k}}\right]dx$. Примеры.
11. Выделение полного квадрата. Примеры.
12. Подстановки Эйлера для вычисления интегралов вида $\int R\left[x,\sqrt{ax^2+bx+c}\right]dx$. Примеры.

13. Тригонометрическая подстановка при интегрировании иррациональностей. Примеры
14. Интегрирование дифференциального бинома (три случая). Примеры.
15. Интегрирование тригонометрических функций (основная тригонометрическая подстановка, замена, понижение степени, применение тригонометрических формул). Примеры.
16. Интегралы от трансцендентных функций, вычисляемые интегрированием по частям. Примеры.
17. Нахождение интегралов вида $\int e^{\alpha x}\cos\beta x\,dx, \quad \int e^{\alpha x}\sin\beta x\,dx$.

Экзамен

18. Понятие разбиения отрезка, свойства разбиений.
19. Определение интеграла Римана. Пример вычисления интеграла.
20. Ограниченность интегрируемой функции. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
21. Верхние и нижние суммы Дарбу. Их свойства (3 свойства).
22. Нижний и верхний интегралы.
23. Критерий интегрируемости функции. Следствие.
24. Классы интегрируемых функций (непрерывные, монотонные).
25. Свойства определенного интеграла (11 свойств).
26. Интегральная теорема о среднем. Следствие.
27. Определенный интеграл с переменным верхним пределом. Теорема о его дифференцируемости. Следствие.
28. Теорема о существовании первообразной.
29. Формула Ньютона-Лейбница.
30. Замена переменной в определенном интеграле. Примеры.
31. Интегрирование по частям в определенном интеграле. Примеры.
32. Понятие площади. Квадрируемые фигуры, критерий квадрируемости. Пример неограниченного множества конечной площади.
33. Понятие объема, критерий кубируемости.
34. Площадь криволинейной трапеции. Вычисление площадей плоских фигур в декартовых координатах. Примеры.
35. Вычисление площадей плоских фигур в полярных координатах. Примеры.
36. Длина дуги. Нахождение длины дуги в декартовых, полярных координатах, в случае параметрического задания кривой. Примеры.
37. Площадь поверхности вращения. Примеры.
38. Объем тела вращения. Примеры.
39. Несобственные интегралы. Несобственные интегралы по бесконечному промежутку.
40. Несобственные интегралы от неограниченной функции.
41. Свойства несобственных интегралов (5 свойств).
42. Несобственные интегралы от неотрицательных функций. Лемма, признак сравнения, следствия.
43. Критерий Коши.
44. Абсолютно сходящиеся интегралы. Критерий Коши абсолютной сходимости.
45. Связь между абсолютной и простой сходимостью.
46. Признаки сходимости Абеля и Дирихле.

Образцы КИМ

Контрольно-измерительный материал №_1_

Теория:

1. Первообразная и неопределенный интеграл. Лемма об отличии двух первообразных на константу. Примеры.
2. Понятие разбиения отрезка, свойства разбиений.
3. Неравенство Коши-Шварца. Следствия. Координатная запись неравенств.

Практика:

1. Найти интегралы $\int \frac{3x+3}{2x^2-x-1}dx$, $\int \frac{e^{3x}-1}{e^x-1}dx$.
2. 1) Исследовать на сходимость интеграл $\int_0^1 \frac{\sqrt{x}dx}{\sqrt{1-x^4}}$. 2) Вычислить площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y=(x-2)^3$, $y=4x-8$.
3. 1) Найти область определения функции $f(x,y)=\sqrt{x+y}+\sqrt{x-y}$. 2) Найти частные производные функции $f(x,y)=x^3+y^3-3xy$. Вычислить их значение в точке (1; 1).

Контрольно-измерительный материал №_2_

Теория:

1. Свойства неопределенного интеграла.
2. Определение интеграла Римана. Ограниченность интегрируемой функции. Пример ограниченной неинтегрируемой функции.
3. Пространство R^n. Метрика, расстояние, норма (определение, свойства). Понятие окрестности в n-мерном пространстве.

Практика:

1. Найти интегралы $\int \frac{dx}{4\sqrt{x}-x}$, $\int \frac{1}{\cos x}dx$.
2. 1) Найти площадь области, ограниченной кривыми, заданными уравнениями $y=xe^{-x}$, $y=0$, $x=2$, $x=4$. 2) Вычислить интеграл $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{8x-arctg 2x}{1+4x^2}dx$.
3. 1) Найти линии уровня функции $f(x,y)=\ln(1-x^2-y^2)$. 2) Найти частные производные функции $f(x,y,z)=x\sqrt[4]{z}+zy+\frac{y}{\sqrt[4]{x}}$.

Контрольно-измерительный материал №_3_

Теория:

1. Формула замены переменной. Примеры.
2. Верхние и нижние суммы Дарбу. Их свойства (3 свойства).

3. Понятие ограниченности множества. Диаметр множества. Теорема о существовании у ограниченной последовательности сходящейся подпоследовательности.

Практика:

1. Вычислить интегралы $\int \frac{dx}{\left(1-x^2\right)^{\frac{5}{2}}}$, $\int \frac{xdx}{(x+1)(x-2)^2}$.

2. 1) Найти объем тела, образованного вращением фигуры, ограниченной линиями $y=e^x-1$, $y=2$, $x=0$ вокруг OX. 2) Вычислить интеграл $\int_{-2}^{0}\left(x^2-4\right)cos\,3xdx$.

3. 1) Найти область определения функции $f(x,y,z)=\ln\frac{x^2+y^2}{z-x^2-y^2}$. 2) Найти частные производные функции $f(x,y)=e^{-xy}$. Вычислить их значение в точке (0; 1).

Семестр №3

Программа по математическому анализу
для студентов 2 курса, 3 семестр

1. Пространство R^n, метрика, норма. Предел последовательности.
2. Функция многих переменных, область определения, линии уровня. Предел функции многих переменных, непрерывность.
3. Частные производные функции многих переменных. Геометрический смысл частных производных. Примеры.
4. Дифференциал функции многих переменных. Теорема о связи дифференциала с частными производными функции.
5. Теорема о дифференцируемости функции, имеющей непрерывные частные производные.
6. Применение дифференциала к приближенным вычислениям. Примеры.
7. Геометрический смысл дифференциала. Касательная плоскость и нормаль к поверхности. Примеры.
8. Производные и дифференциал сложной функции. Инвариантность формы первого дифференциала. Примеры.
9. Производная от функции заданной неявно. Примеры.
10. Частные производные высших порядков функции многих переменных. Теорема о равенстве смешанных производных. Примеры.
11. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных. Примеры.
12. Формула Тейлора для функции двух переменных. Примеры.
13. Экстремумы функций двух (многих) переменных. Необходимое условие экстремума.
14. Достаточное условие экстремума. Критерии установления знакоопределенности квадратичной формы.
15. Условный экстремум. Примеры.
16. Необходимое условие условного экстремума.

17. Достаточное условие условного экстремума. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
18. Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции. Примеры.
19. Понятие числового ряда, определение сходимости.
20. Необходимый признак сходимости числового ряда. Теорема о сходимости линейной комбинации сходящихся рядов.
21. Понятие остатка. Теорема о связи ряда с остатком.
22. Критерий Коши.
23. Лемма о сходимости знакоположительных рядов.
24. Интегральный признак Коши.
25. Теорема о признаке сравнения. Следствие теоремы.
26. Признак Даламбера.
27. Признак Коши.
28. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
29. Абсолютно сходящиеся ряды. Критерий Коши абсолютной сходимости.
30. Связь сходимости и абсолютной сходимости.
31. Свойства абсолютно сходящихся рядов (три теоремы).
32. Условно сходящиеся ряды. Лемма о расходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.
33. Теорема Римана.
34. Преобразование Абеля. Лемма Абеля. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов.
35. Сходимость функциональных последовательностей и рядов. Примеры.
36. Равномерная сходимость функциональных последовательностей и рядов. Лемма о необходимом и достаточном условии равномерной сходимости функциональных последовательностей. Следствие.
37. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.
38. Необходимое условие равномерной сходимости рядов.
39. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных рядов.
40. Вспомогательная теорема об умножении членов равномерно сходящегося ряда на ограниченную функцию. Признак Вейерштрасса.
41. Признаки Дирихле-Харди и Абеля-Харди.
42. Свойства равномерно сходящихся последовательностей и рядов (3 теоремы).
43. Степенные ряды, радиус сходимости. Примеры. Первая теорема Абеля.
44. Радиус сходимости. Теорема об абсолютной и равномерной сходимости степенного ряда. Примеры.
45. Вторая теорема Абеля.
46. Лемма о равенстве радиусов сходимости рядов $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$.
47. Аналитические функции (определение, 2 теоремы). Примеры разложения в степенной ряд.
48. Тригонометрические системы Фурье. Лемма о свойствах функций тригонометрической системы. Теорема о коэффициентах ряда Фурье.
49. Абсолютно интегрируемые функции. Финитные функции, характеристические функции, ступенчатые функции. Интегрирование ступенчатой функции.
50. Лемма о приближении функции последовательностью финитных ступенчатых функций.

51. Теорема Римана. Следствие.
52. Представление частичных сумм ряда Фурье абсолютно интегрируемой функции через интеграл Дирихле. Лемма о свойствах ядра Дирихле
53. Лемма о представлении частичной суммы Фурье абсолютно интегрируемой 2π-периодической функции. Следствие.
54. Теорема о принципе локализации.
55. Лемма о сходимости интегралов $\int\limits_0^{\pi}\frac{|f(t)|}{t}dt$ и $\int\limits_0^{\pi}\frac{|f(t)|}{2\sin\frac{t}{2}}dt$.
56. Понятие кусочно дифференцируемой функции. Признак Дини. Следствия.

Образцы КИМ

Контрольно-измерительный материал №_1_

Теория:

1. Частные производные, дифференцируемость функции многих переменных.
2. Признаки Абеля и Дирихле сходимости рядов.
3. Сходимость функциональных последовательностей. Примеры.

Практика:

1. Для функции $z=\frac{x}{y}$ показать, что $x\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}-\frac{\partial z}{\partial y}=0$.
2. Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+1}{6^n}$.
3. Найти область сходимости функционального ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n-2)^3(x+3)^{2n}}{2n+3}$.

Контрольно-измерительный материал №_2_

Теория:

1. Частные производные высших порядков сложной функции многих переменных.
2. Теорема Римана.
3. Равномерная сходимость функциональных последовательностей. Лемма о необходимом и достаточном условии равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Практика:

1. Исследовать на экстремум функцию $z=x^2+4xy+y^2-12x-3y$.
2. Исследовать сходимость знакочередующегося ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$.
2. Найти радиус и интервал сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)^4x^{2n}}{2n+1}$.

Контрольно-измерительный материал №_3_

Теория:

1. Дифференциалы высших порядков функции многих переменных.

2. Условно сходящиеся ряды. Лемма о расходимости рядов $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+$ и $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^-$.

3. Критерий Коши равномерной сходимости функциональных последовательностей.

Практика:

1. Для функции $z = arctg\,\frac{y}{x}$ показать, что $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$.

2. Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n^2 + 2n}}$.

3. Исследовать на равномерную сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$, $[-5,\ -1]$.

Семестр №4

Программа по математическому анализу для студентов 2 курса, 4 семестр

1. Понятие меры в n-мерном пространстве. Свойства мер.
2. Разбиение измеримых множеств, свойства разбиений. Интегральные суммы.
3. Определение двойного интеграла.
4. Существование двойного интеграла. Теоремы об интегрируемости функции (2 теоремы).
5. Свойства двойного интеграла.
6. Сведение двойного интеграла к повторному (лемма, теорема, понятие правильной области).
7. Замена переменной в двойном интеграле. Полярные координаты.
8. Приложения двойных интегралов.
9. Определение тройного и кратного интегралов.
10. Существование тройного интеграла. Свойства тройного интеграла.
11. Сведение тройного и кратного интеграла к последовательному.
12. Замена переменной в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
13. Приложения тройных интегралов.
14. Несобственные кратные интегралы (по неограниченной области и от неограниченной функции).
15. Физический смысл криволинейных интегралов.
16. Криволинейный интеграл 1-го рода (определение, свойства, вычисление, приложения).
17. Криволинейный интеграл 2-го рода (определение, свойства, вычисление).

18. Формула Грина для различных областей. Формула для нахождения площадей. Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.
19. Элементы теории поверхностей (определение поверхности, ориентация, касательная плоскость, нормаль и т.д.).
20. Физический смысл поверхностных интегралов.
21. Поверхностный интеграл 1-го рода (определение, свойства, вычисление, приложения).
22. Поверхностный интеграл 2-го рода (определение, свойства, вычисление).
23. Скалярные и векторные поля, потенциал, дивергенция, вихрь, циркуляция, поток.
24. Формула Остроградского-Гаусса. Следствие. Пример.
25. Геометрическое определение дивергенции.
26. Формула Стокса. Пример.
27. Геометрическое определение вихря.
28. Равномерная сходимость по параметру семейства функций. Лемма о равномерной сходимости. Критерий Коши.
29. Интегралы, зависящие от параметра. Равномерно сходящиеся интегралы. Свойства интегралов, зависящих от параметра (4 свойства).
30. Несобственные интегралы, зависящие от параметра. Равномерная сходимость. Критерий Коши. Признак Вейерштрасса.
31. Свойства несобственных интегралов, зависящих от параметра (3 свойства).
32. Интегралы Эйлера. В-функция, Г-функция.

Образцы КИМ

Контрольно-измерительный материал № 1

Теория:

1. Тригонометрические системы Фурье. Лемма о свойствах функций тригонометрической системы.
2. Понятие объема в n-мерном пространстве.
3. Понятие поверхностного интеграла.

Практика:

1. Представить периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le 3,\\ 6;\ 3<x\le 6,\end{cases}$ заданную на полупериоде, рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.
2. Изменить порядок интегрирования в двойном интеграле $\int\limits_{-1}^{0}dx\int\limits_{-8x^2}^{-2x+6}f(x,y)dy$. Сделать чертеж области интегрирования.
3. Вычислить поверхностный интеграл $\iint\limits_S (x+y+z)\,dS$, где S − часть плоскости $x+2y+4z=4$, лежащая в первом октанте ($x\ge0$, $y\ge0$, $z\ge0$).

Контрольно-измерительный материал №_2_

Теория:

1. Теорема о коэффициентах ряда Фурье.
2. Свойства мер.
3. Поверхностный интеграл первого рода. Свойства.

Практика:

1. Разложить в ряд Фурье функцию $f(x)=\dfrac{x}{2}-\pi$ с периодом 2π, заданную на отрезке $\lfloor -\pi;\ \pi \rfloor$.

2. Вычислить тройной интеграл $\iiint\limits_D y\cos(z+x)dxdydz,\ D$ — область, ограниченная цилиндром $y=\sqrt{x}$ и плоскостями $x+z=\dfrac{\pi}{2},\ y=0$ и $z=0$.

3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S (xy+yz+zx)\,dS$, где S − часть конуса $z=\sqrt{x^2+y^2}$ внутри поверхности $x^2+y^2=2ax$.

Контрольно-измерительный материал №_3_

Теория:

1. Абсолютно интегрируемые функции.
2. Разбиение измеримых множеств, свойства разбиений.
3. Поверхностный интеграл первого рода. Вычисление. Выражение поверхностного интеграла через двойной.

Практика:

1. Представить периодическую функцию $f(x)=\begin{cases}2x;\ 0\le x\le 3,\\ 6;\ 3<x\le 6,\end{cases}$ заданную на полупериоде, рядом Фурье по синусам. Построить график функции и график суммы полученного ряда Фурье.

2. Применяя формулу Грина, вычислить криволинейный интеграл: $\oint\limits_L (xy+y+x)dx+(yx-y+x)dy$, L – эллипс $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

3. Вычислить интеграл $\iint\limits_S z^2 dS$, где S представляет собой полную поверхность конуса $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2$.

Описание технологии проведения промежуточной аттестации

Для оценивания результатов обучения на зачете используются следующие показатели:

1) знание основных понятий математического анализа, методов и приемов решения базовых задач;
2) умение формулировать основные определения и теоремы курса математического анализа, решать задачи и анализировать полученные результаты;
3) владение математическим аппаратом для решения задач анализа и прикладных задач.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Ответ на контрольно-измерительный материал соответствует одному или более чем одному из перечисленных показателей, обучающийся дает ответы на дополнительные вопросы, может быть не совсем полные. Демонстрирует знание учебного материала, возможно с некоторыми ошибками.	Пороговый уровень и выше порогового	зачтено
Ответ на контрольно-измерительный материал не соответствует ни одному из перечисленных показателей. Обучающийся демонстрирует фрагментарные знания и умения или отсутствие их.		не зачтено

Для оценивания результатов обучения на экзамене используются следующие показатели:
1) знание основных определений, понятий и идей изучаемых разделов математического анализа; формулировок и доказательств основных результатов этих разделов.
2) умение применять полученные знания и навыки для решения задач; проводить анализ и оптимизацию полученных решений, используя определения; проводить исследования, связанные с основными понятиями.
3) владение современными знаниями о математическом анализе и его приложениях; методами математического анализа для решения задач, обоснования результатов расчётов и рассуждений.

Критерии оценивания компетенций	Уровень сформированности компетенций	Шкала оценок
Обучающийся в полной мере владеет понятийным аппаратом данной области науки (теоретическими основами дисциплины), способен иллюстрировать ответ примерами, фактами, данными научных исследований, применять теоретические знания для решения практических задач.	Повышенный уровень	Отлично
Сформированные, но содержащие отдельные пробелы знания основных определений, понятий и идей изучаемого курса, знание с небольшими недочетами доказательств основных результатов. Сформированное, но содержащее отдельные пробелы умение использовать математический аппарат для формализации, анализа и выработки решений.	Базовый уровень	Хорошо

Неполное представление об основных определениях, понятиях и идеях изучаемого курса, незнание доказательств основных результатов. Не полностью сформированное умение использовать математический аппарат для формализации, анализа и выработки решений.	Пороговый уровень	Удовлетворительно
Фрагментарные знания или отсутствие знаний и умений.	-	Неудовлетворительно

20.3 Фонд оценочных средств сформированности компетенций студентов, рекомендуемый для проведения диагностических работ

1. Какие из указанных последовательностей $\{x_n\}$ являются ограниченными (выделите один/несколько ответов)?

а) $\frac{100}{n}$

б) $n \cdot \sin n$

в) $1, -1, 1, -1, 1, -1, \ldots$

г) $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

Ответ: а), в), г).

2. Чему равен $\lim_{n\to\infty} \frac{5\cdot 2^n - 3\cdot 5^{n+1}}{100\cdot 2^n + 2\cdot 5^n}$?

а) 0

б) $-7{,}5$

в) $-\frac{3}{2}$

г) $0{,}05$

Ответ: б).

3. Чему равны верхний и нижний пределы последовательности $\{x_n\}$, если $x_n = \cos\frac{\pi n}{3}$?

а) $1; -1$

б) $\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$

в) $\frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2}$

г) $2; -1$

Ответ: а).

4. Чему равен предел функции $f(x)$ в точке x_0, если:
- в некоторой проколотой окрестности точки x_0 $g(x) \le f(x) \le h(x)$;
- $\lim_{x \to x_0} g(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = a$?
а) 0
б) 1
в) $\frac{a}{2}$
г) a
Ответ: г).

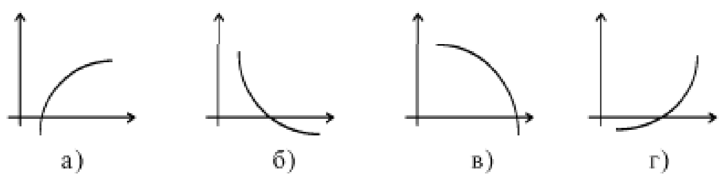
5. Чему равен $\lim\limits_{x \to 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}$?
а) 1
б) 0
в) ∞
г) не существует
Ответ: а).

6. При каких a функция $f(x) = \begin{cases} (x-1)^3, & x \le 0 \\ 3x + a, & 0 < x \end{cases}$ непрерывна?
а) 1
б) 0
в) -1
г) 3
Ответ: в).

7. Найдите точки разрыва функции $f(x) = sgn(x^2 - 2x - 3)$.
Ответ: -1, 3.

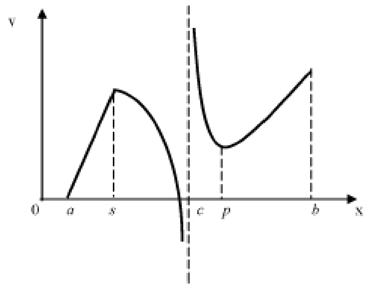
8. Предел отношения $\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при $\Delta x \to 0$ называется:
а) производной функции $f(x)$ в точке x_0;
б) пределом функции $f(x)$ в точке x_0;
в) скачком функции $f(x)$ в точке x_0.
Ответ: а).
9. Число точек перегиба функции $y=x^4+4x$ равно
а) 2
б) 1
в) 0
г) 3
Ответ: в).

10. График функции $y=f(x)$, удовлетворяющей условиям $f'(x) < 0$, $f''(x) > 0$ изображен на рисунке



Ответ: б).

11. Укажите точки, в которых функция, график которой изображен на рисунке, имеет максимум.



Ответ: s.

12. Чему равен неопределенный интеграл $\int \sin^2 \frac{x}{2} dx$?

а) $\frac{x-\sin x}{2} + c$
б) $-\frac{1}{2}\cos {}^2\frac{x}{2} + c$
в) $1 - \cos x + c$
г) $\operatorname{tg}\frac{x}{2} + c$
Ответ: а).

13. Найти $\frac{\partial u}{\partial y}(1,2)$, если $u(x,y) = yx^2 + y^2$.
Ответ: 5.

14. Среди перечисленных функций укажите все, которые являются первообразными для функции $y=\frac{1}{x}$.

а) $ln|x|$
б) $xlnx$
в) $ln|x| + c$
г) $\frac{1}{x} + x$
Ответ: а), в).

15. Число *a* является пределом числовой последовательности $\{x_n\}$, если
а) $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0)(|x_n - a| = \varepsilon)$
б) $\forall(\varepsilon > 0)(\forall n \geqslant N_0)(|x_n - a| < \varepsilon)$
в) $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0)(|x_n - a| > \varepsilon)$
г) $\forall(\varepsilon > 0)\exists(N_0 \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N_0)(|x_n - a| < \varepsilon)$
Ответ: г).

16. Значение предела функции $lim_{x\to\infty}\frac{10x^3+5x-1}{2x^5+x+1}$ равно
а) 3,5
б) 0
в) 3
г) 1
Ответ: б).

17. Среди перечисленных интегралов укажите все, которые вычисляются с помощью формулы интегрирования по частям:

а) $\int \cos^3 x \, dx$

б) $\int x \cos x \, dx$

в) $\int x \ln x \, dx$

г) $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x+6}}$

Ответ: б), в).

18. Точка $x_0 = 0$ является для функции $y = \frac{1}{x}$

а) точкой из области определения данной функции

б) точкой разрыва первого рода

в) точкой разрыва второго рода

г) точкой, в которой данная функция непрерывна

Ответ: в).

19. Найдите производную сложной функции $y = e^{2x}$ при *x*=0

Ответ: 2.

20. Найдите промежутки убывания функции $y = x^3 - 3x + 5$.

Ответ: $(-1; 1)$.

21. Уравнение касательной к графику функции $f(x) = \frac{1}{\pi} x sin(2x)$ в точке $x = \pi$ имеет вид $y = a(x - \pi)$. Найдите *a*.

Ответ: 2.

22. С помощью дифференциала найдите приближенно $ln(1{,}05)$.

Ответ: 0,05.

23. Поиск условного экстремума функции $z = f(x, y)$ при наличии уравнения связи $\phi = \phi(x, y)$ производится методом неопределенных множителей ……………………..

Ответ: Лагранжа.

24. Частной производной функции $z = \frac{y}{x}$ по переменной *x* является

а) $\frac{-y}{x^2}$

б) $\frac{1}{x}$

в) $\frac{y^2}{x}$

г) $\frac{x}{y}$

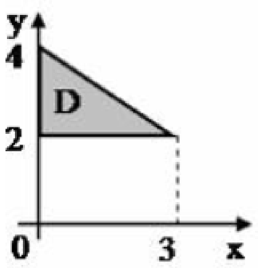
Ответ: а).

25. Сумма координат критической точки функции
$z = x^2 + xy + y^2 - 2x - y$ равна
а) 3,5
б) -12
в) 3
г) 1
Ответ: г).

26. Полный дифференциал функции $u = e^{2xy} + 5z$ имеет вид
а) $e^{2xy}(ydx + xdy) + 5dz$
б) $2e^{2xy}(ydx + xdy)$
в) $2e^{2xy}(ydx + xdy) + dz$
г) $2e^{2xy}(ydx + xdy) + 5dz$
Ответ: г).

27. Функция $z(x;\ y)$ задана неявным образом $xyz = x + y + z$. Значение ее частной производной z'_y в точке $M(2, 3)$ равно
а) 0
б) $-0{,}2$
в) 2
г) 3
Ответ: б).

28. Область *D* изображена на рисунке



Значение двойного интеграла $\iint\limits_D \mathrm{dxdy}$ равно…………..

Ответ: 3.

29. Признак Даламбера сходимости числового ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P_k$ с положительными членами P_k заключается в том, что:

а) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{P_{k+1}}{P_k} = q$, q<1 - ряд расходится, q>1 - ряд сходится

б) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{P_k} = q$, q<1 - ряд расходится, q>1 - ряд сходится

в) $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{P_{k+1}}{P_k} = q$, q>1 - ряд расходится, q<1 - ряд сходится

г) $\lim\limits_{k\to\infty} \sqrt[k]{P_k} = q$, q>1 - ряд расходится, q<1 - ряд сходится

Ответ: в).

30. Функция e^x разлагается в ряд Маклорана вида

а) $1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\ldots$

б) $x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\ldots$

в) $1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots$

г) $x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots$

Ответ: в).

31. Найдите четвертый член a_4 числового ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot(n+2)}{2^{n-1}}$

Ответ: 3.

32. Ряд $2x+\frac{2x^3}{3}+\ldots+\frac{2x^{2k-1}}{2k-1}+\ldots$ сходится на промежутке

Ответ: (–1; 1).

33. Функция $F(x)$ является первообразной функции $f(x)$, если

а) $F'(x)=f(x)$

б) $F(x)=f'(x)$

в) $F(x)=f(x)$

г) $F'(x)=f(x)+C$

Ответ: а).

34. Какое из свойств неопределенного интеграла неверное

а) $\int Cf(x)dx=C\int f(x)dx$

б) $\int\big(f(x)+g(x)\big)\,dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$

в) $\int\big(f(x)*g(x)\big)\,dx=\int f(x)dx*\int g(x)dx$

г) $\int f(kx+b)=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$, где *F* - первообразная *f*

Ответ: в).

35. Найдите производную *n*-ного порядка от функции $y=x^n$.

Ответ: *n*!.

36. Множество первообразных функции $f(x)=x^{-1}$ равно

а) $\frac{-1}{x^2}+c$

б) $ln|x|+c$

в) $\frac{-1}{x}+c$

г) $\frac{1}{x^2}+c$

Ответ: б).

37. Значение интеграла $\int tg\,(x)dx$ равно
а) $-ln|cosx| + c$
б) $ln|cosx| + c$
в) $-ln|sinx| + c$
г) $ln|sinx| + c$
Ответ: а).

38. В результате вычисления интеграла $\int xsinxdx$ получим
а) 0
б) $xcosx + sinx + c$
в) $xcosx - sinx + c$
г) $-xcosx + sinx + c$
Ответ: г).

39. Выполняется ли необходимый признак сходимости для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^8+4n^4-4}{4n^2+n-5}$?
Ответ: Нет.

40. Какие из указанных пределов равны 1?
1) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{x}$ 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{tg2x}{2x}$ 3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{arctgx}{x}$ 4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$ 5) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}$
а) все
б) только 4
в) все, кроме 1
г) 1 и 2
Ответ: в).

41. Дана производная $f\,'(x)=(x-2)(x-3)$. Функции $f(x)$ имеет максимум в точке x_0=……….
Ответ: 2.

42. Уравнение вертикальной асимптоты графика функции $y=\frac{x}{x-1}$ имеет вид……………………..
Ответ: x=1.

43. Горизонтальной асимптотой графика функции $y=\frac{2x}{3x-2}$ является прямая:
а) y=2
б) y=2x
в) $x = \frac{2}{3}$
г) $y = \frac{2}{3}$
Ответ: г).

44. Установите соответствие между объектами

а) Первый замечательный предел	1) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x = e$
б) Второй замечательный предел	2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$
в) Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей	3) $f'(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
	4) $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Ответ: а)-2); б)-1) в)-4).

45. Найдите дифференциал функции $f(x)=ln(x^2+1)$ в точке $x=1$ при $\Delta x=0{,}1$. Ответ увеличить в 20 раз.

Ответ: 2.

46. Найдите область определения функции $f(x) = \sqrt{\frac{2-x}{2x+1}}$.

Ответ: (–0,5; 2].

47. Найдите производную y'_x функции, заданной параметрически

$$\begin{cases} x = 2\cos^2 t \\ y = 3\sin^2 t \end{cases}.$$

Ответ: –1,5.

48. Закон движения материальной точки $s=t^4-3t^2+2t-4$. Найдите скорость движения точки в момент времени $t=2$ с.

Ответ: 22.

49. Найдите площадь фигуры, ограниченной осью абсцисс и графиком функции $y = 3 - 2x - x^2$

а) $10\frac{2}{3}$

б) $10\frac{1}{3}$

в) $9\frac{2}{3}$

г) $11\frac{1}{3}$

Ответ: а).

50. Вычислите $\iint_D \, ydxdy$, где область D ограничена линиями $x=1$, $y = x^2$, $y=0$

а) 0,5

б) 0,1

в) 1

г) 0,7

Ответ б).

Критерии и шкалы оценивания заданий ФОС:

1) Задания закрытого типа (выбор одного варианта ответа, верно/неверно):

- 1 балл – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

2) Задания закрытого типа (множественный выбор):

- 2 балла – указаны все верные ответы;
- 0 баллов — указан хотя бы один неверный ответ.

3) Задания закрытого типа (на соответствие):

- 2 балла – все соответствия определены верно;
- 0 баллов – хотя бы одно сопоставление определено неверно.

4) Задания открытого типа (короткий текст):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

5) Задания открытого типа (число):

- 2 балла – указан верный ответ;
- 0 баллов – указан неверный ответ.

Задания раздела 20.3 рекомендуются к использованию при проведении диагностических работ с целью оценки остаточных результатов освоения данной дисциплины (знаний, умений, навыков).